Forschungsseminar
Visualisierung

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DYNAMISCHER SYSTEME - TEIL II

Vortrag am 8. November 1995

Zsolt SZALAVÁRI

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

Dictionary **4**

Trace 4
Vorticity & Curl 4
Stream Vorticity 5
Helicity & Helicity Density 5
Zirkulation 6

Eigenwert, Eigenvektor, Eigenschaft **7**

Eigenwert, Eigenvektor 7
Eigenschaften 8

Differentialgeometrie **9**

Raumkurven 9
Frenet-Frame 9
Frenet-Formeln 10
Krümmung 11
Torsion 11

Literaturverzeichnis **12**

Einleitung

Im ersten Teil dieses Vortrages wurden die Begriffe

- partielle Ableitung,
- Gradient,
- Divergenz,
- Rotation,
- Vektor-Vektor-Funktion,
- Jacobi-Matrix und dessen Zerlegung

vorgestellt und erläutert.

Als erstes werden hier weitere Begriffe geklärt, die vorwiegend in der englischsprachigen Literatur vorkommen, und in den verschiedenen Artikeln zum Teil auch unterschiedlich benutzt werden.

Im weiteren Teil werden auch einige Begriffe aus der Differentialgeometrie eingeführt, die in engem Zusammenhang mit den lokalen Eigenschaften eines Systems stehen und deren Verständnis auch zum Erfassen dieser Systeme beitragen kann. Da sich diese Begriffe auf Raumkurven beziehen, wird zuerst ein Zusammenhang zwischen Vektor-Vektor-Funktionen und solchen Kurven hergestellt.

Dictionary

Einige der in den Artikeln verwendeten englischen Begriffe sind dort nur undeutlich erklärt, oder in einem Fall sogar misdeutet, was zu Verwechselungen führen kann. Um diese weiters zu vermeiden werden die schon bekannten mathematischen Begriffe rein wortmäßig erklärt, während andere auch inhaltsgemäß erlätert werden.

Trace

Trace wird im deutschen **Spur** bezeichnet und ist die Summe der Komponenten in der Hauptachse einer Matrix. Es ist ein Skalarwert und ist identisch mit der Divergenz, nähmlich

$$\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{J}}\right) = \mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{J}}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \underline{v} = \mathrm{div}(v). \tag{1}$$

Vorticity & Curl

Vorticity ist die 'Wirbligkeit' eines Vektorfeldes an einem gegebenen Ort, was im deutschen als **Rotation** zu bezeichnen ist. Die Länge dieses Vektors gibt die Winkelgeschwindigkeit an und die Richtung ist kollinear mit der momentanen Drehachse des Vektorfeldes an einem gegebenen Ort. Es wird auch der Begriff *curl* verwendet, welches sich nach einschlägiger Interpretation auch als Rotation erwiesen hat. Es gilt

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} = \mathrm{curl}\,\underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \underline{\omega}\,. \tag{2}$$

Es ist in dem Artikel von Hansen [HANS93] eine 'eigenartige' Definition von *curl* gegeben, welches sich im Sinn der allgemeinen Verwendung dieses Begriffs als verwirrend und falsch herausgestellt hat. ($\nabla\underline{v}$ ist je nach Notation entweder $\underline{\underline{J}}$ oder div $\underline{v}$!)

Stream Vorticity

Die *stream vorticity* ist der Cosinus des eingeschlossenen Winkels zwischen Geschwindigkeitsvektor und Rotationsvektor. Interpretiert gibt dieser Wert den Wirbelcharakter des Vektorfeldes (bzw. Strömung) in die Richtung der momentanen Geschwindigkeit an! Sie wird in der Literatur definiert, als:

$$\Omega = \frac{\underline{v}\underline{\omega}}{|\underline{v}||\underline{\omega}|} = \frac{\underline{v}(\nabla \times \underline{v})}{|\underline{v}||\nabla \times \underline{v}|}. \tag{3}$$

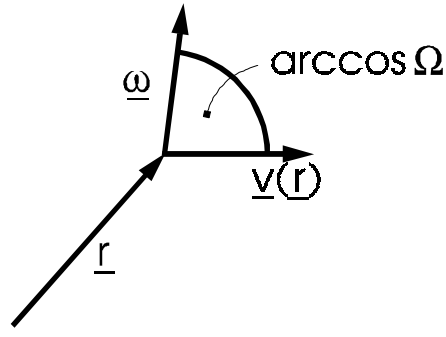

Abb.1 - Darstellung der *stream vorticity*

Helicity & Helicity Density

Beide Begriffe kommen in der Literatur vor und sind inhaltlich identisch mit der *stream vorticity*. Während aber die *stream vorticity* mit den Längen der Vektoren des Sklalarproduktes genormt ist, ist die *helicity* ein reines Skalarprodukt dieser Größen. Da es sich bei den Größen nur um skalierte Varianten des anderen handelt, sind diese in Termen der Visualisierung gleichwertig.

$$helicity = \underline{v}\left(\nabla \times \underline{v}\right) = \underline{v}\underline{\omega} \tag{4}$$

Zirkulation

Die Zirkulation ist ein Integral, das das Maß der Wirbeligkeit eines Vektorfeldes (bzw. Strömung) angibt. Sie kann nach der Stokes'schen Gleichung auf zwei Arten ausdegrückt werden:

$$\Gamma = \oint_G \underline{v}\, d\underline{s} = \int_A \mathrm{rot}\,\underline{v}\, d\underline{A}. \tag{5}$$

Man kann beweisen, daß folgende Aussagen über einen Vektorfeld, in einem einfach zusammenhängenden Raum äquivalent sind:

- es gibt eine Potentialfunktion $\underline{v}=grad\varphi$,
- die Zirkulation ist für jede geschloßene Kurve $\Gamma=0$ und
- das Vektorfeld ist Wirbelfrei, also *rot* $\underline{v}=0$.

Das bedeutet in der Visualisierungspraxis z.B., daß wenn man die Rotation überall Null ist, nur noch ein Skalarfeld zu visualisiert werden braucht, dessen Gradient an jedem Punkt dann die Geschwindigkeit ergibt. Außerdem ist somit die Zirkulation auch eine visualisierbare Größe, das sich durch numerische Integration der Rotation mit festen Untersuchungsvolumina schnell ermitteln lässt.

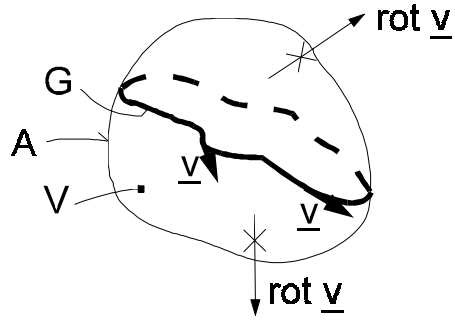

Abb. 2 - Zirkulation in einem Vektorfeld

Eigenwert, Eigenvektor, Eigenschaft

Eigenwert, Eigenvektor

Als **Eigenwert** einer Matrix $\underline{\underline{A}}$ bezeichnet man den Wert λ, der die Gleichung

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x} \tag{6}$$

erfüllt. Dabei ist der Vektor $\underline{x}$ der **Eigenvektor** der Matrix.

Mit Hilfe der charakteristischen Gleichung

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\,\underline{\underline{E}}\right) = 0 \tag{7}$$

können die Eigenwerte bestimmt werden, wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind. Die Eigenvektoren der Matrix können aus dem homogen linearen Gleichungssystem als nicht-triviale Lösung ermittelt werden:

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i\,\underline{\underline{E}}\right)\underline{x} = 0 \tag{8}$$

Steht die Jacobi-Matrix eines Vektorfeldes an einem gegebenen Ort zur Verfügung, können Aussagen über lokale Eigenschaften in der Umgebung des untersuchten Punktes getroffen werden, da sich das Vektorfeld um einen Punkt wiefolgt beschreiben läßt:

$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r}_0) + \underline{\underline{J}}\,(\underline{r} - \underline{r}_0) \tag{9}$$

Ermittelt man nun die Eigenvektoren der Jacobi-Matrix, erhält man Vektoren $\underline{x}_i$, die ein Koordinatensystem aufspannen, entlang dessen Achsen durch Skalierung um die Faktoren λ_i die gleiche Wirkung erzielt wird, als ob man die Jacobi-Matrix direkt angewendet hätte. So kann aus der komplexen zusammengesetzten Transformation der Scherung und Drehung eine reine Scherung in bestimmte Richtungen abgeleitet werden.

Eigenschaften

Es gibt in Vektorfeldern kritische Punkte, wo alle Geschwindigkeitskomponenten Null sind. Das Verhalten um so einen Punkt herum lassen sich nach den Eigenwerten und den Eigenvektoren der Jacobi-Matrix klassifizieren. Positive Eigenwerte geben ein Hinwegströmen von kritischen Punkt an (abstoßender Punkt), während negative ein Hinzuströmen indizieren (anziehender Punkt). Komplexe Eigenwerte kennzeichnen einen Fokus, von denen die mit realem Teil Spiralen bilden, während die ohne realem Teil über konzentrische Ellipsen berichten. Gibt es sowohl positive, als auch negative realen Teile ist der kritische Punkt ein Sattelpunkt.

Nochmal eine Zusammenstellung für den dreidimensionalen Fall:

a) abstoßender Fokus, auch in der dritten Dimension abstoßend,
b) abstoßender Punkt,
c) Sattelpunkt in der dritten Dimension abstoßend,
d) anziehender Fokus, in der dritten Dimension abstoßend,
e) anziehender Punkt,
f) Zentrum, in der dritten Dimension abstoßend.

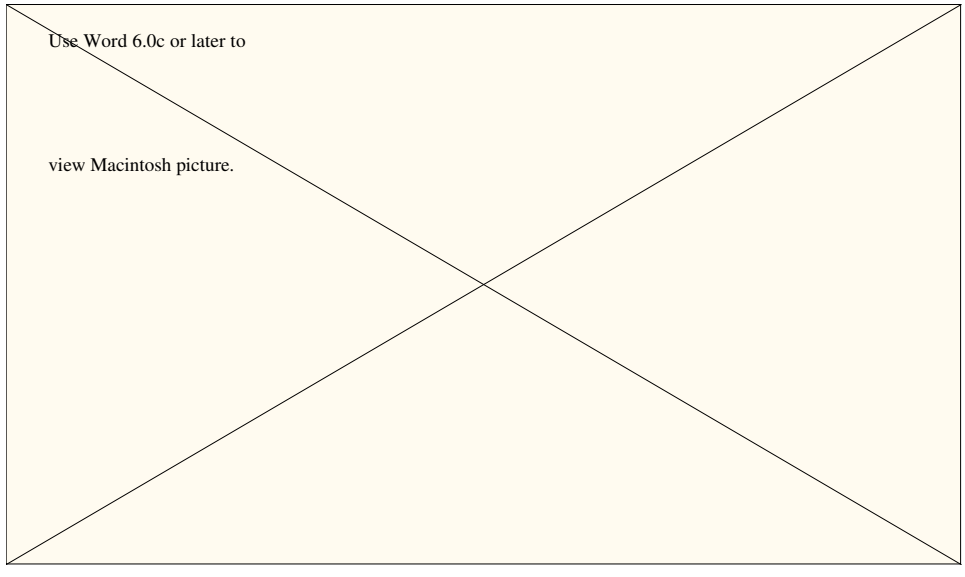

Abb. 3 - Dreidimensionale kritische Punkte

Differentialgeometrie

Raumkurven

Kurven im dreidimensionalen Raum werden meistens in der Parameterform

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} \tag{10}$$

wobei *t* der laufende Parameter ist. Die Ableitungen nach *t* werden mit Punkten gekennzeichnet:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}, \quad \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \ddot{\underline{r}}(t), \quad \frac{d^3\underline{r}}{dt^3} = \dddot{\underline{r}}(t). \tag{11}$$

Die Kurve läßt sich auch nach der Sehnenlänge parametrisieren, mit

$$\underline{r}(s) = x(s)\underline{i} + y(s)\underline{j} + z(s)\underline{k} \tag{12}$$

und

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{r}'(s), \quad \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} = \underline{r}''(s), \quad \frac{d^3\underline{r}}{ds^3} = \underline{r}'''(s). \tag{13}$$

Um den Zusammenhang zwischen einem Vektorfeld und den nun folgenden Aufführungen zu verstehen, kann unter Betrachtung der Lagrange- und Eulerbeschreibungen des Vektorfeldes folgender Zusammenhang aufgestellt werden:

$$\underline{r}'(s) = \underline{v}(\underline{r}) \tag{14}$$

Das ist die Beschreibung einer Strömungslinie, an dessen jedem Punkt die Geschwindigkeit tangential liegt. Die Untersuchung der Parameter dieser Kurve kann weiteren Aufschluß über die Eigenschaften des Vektorfeldes geben, deshalb werden im folgenden Begriffe der Differentialgeometrie eingeführt.

Frenet-Frame

Das Frenet-Frame ist eine orthogonale Koordinatenbasis das von einem Vektortrio aufgespannt wird. Es ist an jedem Punkt der Kurve definiert und besteht aus dem Tangentialvektor $\underline{t}$, dem Normalvektor $\underline{n}$ und dem Binormalvektor $\underline{b}$.

Diese werden wie folgt definiert:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \underline{r}' \tag{15}$$

$$\underline{n} = \frac{(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}}{|(\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}) \times \dot{\underline{r}}|} = \frac{\underline{r}''}{|\underline{r}''|} \tag{16}$$

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|} = \underline{t} \times \underline{n} \tag{17}$$

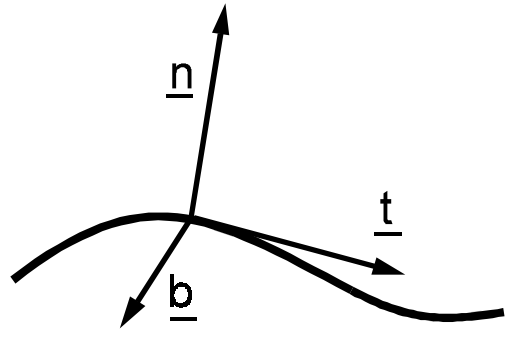

Abb. 4 - Das Frenet-Frame

Frenet-Formeln

Nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden hier die Frenet-Formeln angegeben, die einen Zusammenhang zwischen dem Frame und den hier folgenden zwei weiteren Begriffen der Krümmung und Torsion darstellen:

$$\begin{aligned} \underline{t}' &= K\underline{n} \\ \underline{n}' &= -K\underline{t} + T\underline{b} \\ \underline{b}' &= -T\underline{n} \end{aligned} \tag{18,19,20}$$

Aus diesen Formeln läßt sich eine Kurve im Raum ermitteln, für den nur die Krümmung und die Torsion bekannt ist.

Krümmung

Die Krümmung einer Kurve gibt die Abweichung von der geraden Linie ab. Sie läßt sich als Differentialquotient vom Abweichungswinkel α und der Sehnenlänge *s* bilden:

$$K = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R} = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3} = |\underline{r}''| = \frac{d^2\underline{r}(s)}{ds} = |\underline{t}'| \tag{21}$$

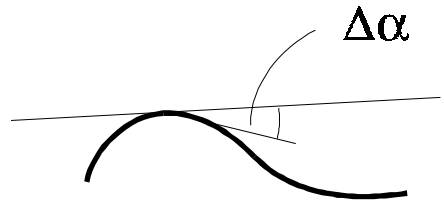

Abb. 5 - Krümmung

Der Normalvektor des Frenet-Frames zeigt in Richtung des momentanen Krümmungsmittelpunktes. Ist die Krümmung und der Normalvektor bekannt, läßt sich in einem kleinen Abschnitt die Kurve durch einen Kreisbogen ersetzen, bzw. annähern.

Torsion

Ähnlich wie die Krümmung die Abweichung der Kurve vom Geraden angibt, beschreibt die Torsion die Verdrehung der Ebene, in der die Kurve momentan liegt. Sie wird als Differentialquotient des Verdrehungwinkels β und der Sehnenlänge *s* definiert:

$$T = \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \frac{\dot{\underline{r}} \cdot (\ddot{\underline{r}} \times \dddot{\underline{r}})}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2} = |\underline{b}'| \tag{22}$$

Ist in einem Intervall des Parameters die Torsion T=0, dann liegt die Kurve in einer Ebene. Ist die Krümmung zu dem noch K=0, dann ist sie eine Gerade. In diesem Fall ist das Frenet-Frame nicht eindeutig definiert, es gibt unendlich viele orthogonale Vektordreibeine, von denen einer kollinear ist mit der Tangente.

In der Literatur ist auch eine sg. **Lancret-Krümmung** definiert. Sie ist die Länge einer vektoriellen Krümmung, das mit $\underline{g}=T\underline{t}+K\underline{b}$ definiert wird. Der Vektor heißt **Daraboux-Vektor**.

Literaturverzeichnis

[BRSE80] Bronstein I.N., Semendjajew K.A., "Taschenbuch der Mathematik", Verlag Harri Deutsch, 1980, Zürich und Frankfurt/M.

[HANS93] Hansen Ch., "Visualisation of Vector Fields (2D and 3D)", Chapter 4, 4-9.

[LAJO94] Lajos T., "Grundlagen der Strömungslehre", Müegyetemi Kiadó, 1994, Budapest

[LEWI93] Leeuw W.C., Wijk J.J., "A Probe for Local Flow Field Visualisation", IEEE Computer Society Press, 1993, 39-45.

[SCHN78] Schneider W., "Mathematische Methoden der Strömungslehre", Vieweg, 1978, 1.Aufl., Braunschweig

[SHVO91] Schroeder W.J., Volpe C.R., Lorensen W.E., "A Technique for 3D Vector Field Visualisation", IEEE Computer Society Press, 1991, 126-131.

[VERM90] Vermes I., "Geometrie - Wegweiser und Aufgabensammlung", Tankönyvkiadó, 1990, Budapest

[POWA93] Post, F.H.,van Walsum T., "Fluid Flow Visualisation", 1993