Forschungseminar
Visualisierung

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DYNAMISCHER SYSTEME

Vortrag am 8. November 1995, 15:30
E881, 8625305, Thomas Kucera
TU Wien, Institut für Computergraphik

Inhaltsverzeichnis

Partielle Ableitung und totales Differential _____ *1*

Gradient, Divergenz und Rotation _____ *2*

Vektorfeld, Vektor - Vektorfunktion (Lagrange - Euler) _____ *5*

Jakobimatrix _____ *6*

Zerlegung der Jakobimatrix in sym. und asym. Teil _____ **6**

Literaturliste _____ *10*

Partielle Ableitung und totales Differential

Wie ist die Ableitung einer Funktion f(x) definiert?

Existiert der $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, so heißt die Funktion f(x) an der Stelle x_0 differenzierbar und der $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt die Ableitung der Funktion oder der Differentialquotient von f(x) an der Stelle x_0. [Hlaw86]

Hat man eine Funktion f(x,y,z,t) gegeben, so hat man das Problem, wenn man die Funktion normal ableiten will (z.B. um den Geschwindigkeitsverlauf zu bekommen), daß die Funktion nicht nur von einer Variable abhängt sondern von vier verschiedenen Variablen. In so einem Fall muß man das totale Differential der Funktion bilden. Es ist die Summe der partiellen Ableitungen nach den einzelnen Variablen.

Was ist eine partielle Ableitung? Man tut so, als würde die Funktion nur von einer Variablen abhängen und die anderen 'Variablen' wären Konstanten.

Beispiel:

$$f(x,y) = x^2 y - 3y^3 x$$

partiell abgeleitet nach x : $\frac{\partial (x^2 y - 3y^3 x)}{\partial x} = 2xy - 3y^3$

partiell abgeleitet nach y : $\frac{\partial (x^2 y - 3y^3 x)}{\partial y} = x^2 - 9y^2 x$

Um anzuzeigen, daß man eine partielle Ableitung vornimmt schreibt man nicht wie gewohnt $\frac{d}{dx}$ wenn man nach x ableiten will, sondern man schreibt ein „schlampiges d" (Zitat Professor Hlawka) $\frac{\partial}{\partial x}$, da man ja keine richtige Ableitung sondern eine schlampige Ableitung macht. Man bekommt bei einer solchen Ableitung die Änderung der Funktion in x-Richtung bei festem y. [Hlaw87]

Will man die Funktion vollständig ableiten, so muß man ein totales Differential bilden. Das totale Differential der Funktion f(x,y,z,t) wäre also die Summe aller partiellen Ableitungen:

$$\frac{df(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}$$

Totales Differential = konvektive Ableitung + lokale Ableitung

Gradient, Divergenz und Rotation

Hinweis:

In diesem Paper werden Vektoren durch unterstreichen gekennzeichnet, d.h. $\vec{v} = \underline{v}$.

Aus der Mathematik sind die Begriffe grad, div und rot bekannt. So ungefähr weiß man (vielleicht auch ganz genau) was sie bedeuten und wozu man sie verwendet. Um eine kleine Auffrischung zu geben sind hier noch einmal die Definitionen der Funktionen gegeben [Hlaw87]:

$$grad\, f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$div\, \underline{v} = \nabla \underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \text{mit} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$rot\, \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Was bedeuten diese Formeln? Welche physikalische Interpretation ist möglich?

Als erstes fällt auf, daß der Gradient aus einer Funktion ein Vektorfeld macht, die Divergenz aus einem Vektorfeld eine Funktion und die Rotation aus einem Vektorfeld wieder ein Vektorfeld.

Die Vektoren im Gradientenfeld (das Feld welches durch den Gradienten entsteht) zeigen immer in Richtung der größten Änderung im Feld. Physikalisch kann man sich das so vorstellen: Hat man ein Potentialfeld gegeben, so zeigt der Gradient immer in die Richtung, in die sich ein Partikel bewegen würde, wenn man es an dieser Stelle in das Feld bringt.

Die Divergenz gibt an ob aus einem infinitesimalen Volumen mehr Flüssigkeit heraus- als hineinströmt. D.h. ist die Divergenz des betrachteten Volumens positiv, so befindet sich in dem Volumen eine Quelle. Ist die Divergenz negativ so verschwindet im Volumen Flüssigkeit, d.h. man hat dort eine Senke. Meistens ist die Divergenz Null dann strömt gleich viel Flüssigkeit in das Volumen wie heraus.

Betrachtet man ein infinitesimales Volumen im Vektorfeld und berechnet man sich dort den Rotationsvektor, so gibt dieser an wie stark und in welcher Richtung sich das Volumen dreht.

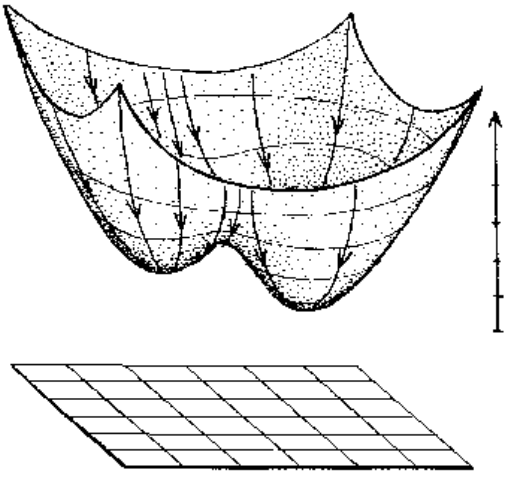

Abb. 1 [AbSh92]

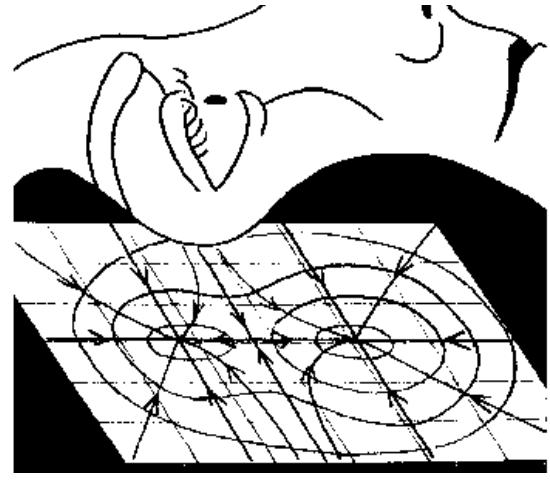

Abb. 2 [AbSh92]

Abb. 1 zeigt ein Potentialfeld im Raum mit eingezeichneten Isolinien und Gradientenfeld. In Abb. 2 sieht man die Projektion der Szene aus Abb. 1 auf die Zeichenebene. Hier kann man sehr gut erkennen, daß der Gradient immer senkrecht auf den Isolinien steht.

Nützliche Rechenregeln für grad, div und rot [Hlaw87]:

$$div\ grad\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

$$rot\ grad\ f = \underline{0}$$

$$div\ rot\ \underline{v} = 0$$

$$grad\ div\ \underline{v} - rot\ rot\ \underline{v} = \Delta \underline{v}$$

Vektorfeld, Vektor - Vektorfunktion (Lagrange - Euler) [POWi90]

Es gibt zwei Möglichkeiten die strömende Bewegung einer Flüssigkeit mathematisch vollständig aufzuschreiben. Zum einen ist das die Ortsänderung aller Teilchen (Abb. 3), der Druckverteilung und der Dichteverteilung in der Flüssigkeit.

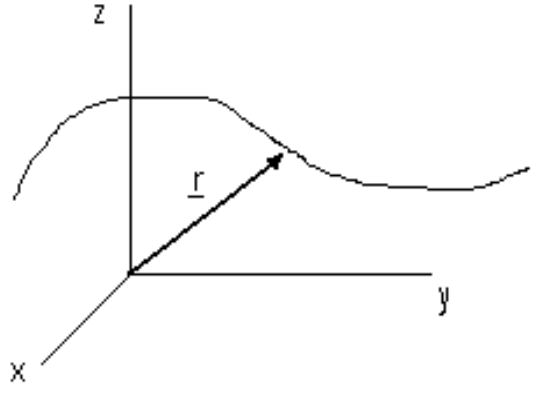

Abb. 3

Diese Beschreibungsart wird nach Lagrange benannt und ist so aufwendig, daß sie nur für einige besondere Fälle gelingt.

Da es aber nicht so wichtig ist über das Schicksal aller Teilchen immer Bescheid zu wissen begnügt man sich mit einer einfacheren Darstellungsweise (Abb. 4). Bei dieser hat man nur für jeden Ort die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung anzugeben. Angaben über den Druck und die Dichte kommen gegebenenfalls dazu. Diese Darstellungsweise wird nach Euler benannt (obwohl Euler schon beide Darstellungsarten gekannt hat).

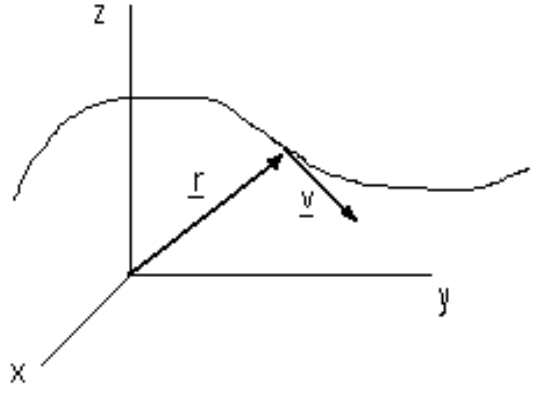

Abb. 4

Man bekommt bei Euler ein Geschwindigkeitsfeld aus dem man dann die Position der einzelnen Teilchen zurückrechnen kann.

Jakobimatrix

Was ist die Jakobimatrix?

Es ist eine Rechenvorschrift für den Vektor $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, die wie folgt lautet:

$$J = \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} \tag{1}$$

Die rechte Matrix ist die Kurzschreibweise der mittleren Matrix, wobei $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ (die anderen entsprechend) ist. In der Jakobimatrix ist nach allen Komponenten des Vektors und nach allen Richtungen des Koordinatensystems partiell abgeleitet worden. D.h. es ist ein Gradiententensor entstanden.

Mit der Jakobimatrix kann man eine einfache Näherung für das Feld u(x) angeben, die das lokale Verhalten bei einem Punkt x_0 beschreibt.

$$u(x) = u(x_0) + J(x - x_0)$$

Zerlegung der Jakobimatrix in sym. und asym. Teil

Wie wird zerlegt?

Man muß die Matrix so zerlegen, daß $J = J_{sym} + J_{asym}$ gilt. Außerdem soll eine symmetrische und eine asymmetrische Matrix entstehen. Eine symmetrische Matrix ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre transponierte Matrix gleich der Matrix selbst ist. Bei der asymmetrischen Matrix ist die transponierte Matrix gleich der negativen Matrix.

$$sym.: \quad A^T = A$$
$$asym.: A^T = -A$$

Die transponierte Matrix erhält man, wenn man die Zeilen einer Matrix mit den Spalten der Matrix vertauscht.

Die Rechenregeln um auf die sym. bzw. asym. Jakobimatrix zu kommen lauten:

$$J_{sym} = \frac{J + J^T}{2} \text{ und } J_{asym} = \frac{J - J^T}{2}$$

Angewendet auf die allgemeine Form der Jakobimatrix (1) bekommt man:

$$J^T = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$

$$J_{sym} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2u_x & u_y + v_x & u_z + w_x \\ u_y + v_x & 2v_y & v_z + w_y \\ u_z + w_x & v_z + w_y & 2w_z \end{bmatrix}$$

$$J_{asym} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & u_y - v_x & u_z - w_x \\ v_x - u_y & 0 & v_z - w_y \\ w_x - u_z & w_y - v_z & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -(rot\,\underline{v})_z & (rot\,\underline{v})_y \\ (rot\,\underline{v})_z & 0 & -(rot\,\underline{v})_x \\ -(rot\,\underline{v})_y & (rot\,\underline{v})_x & 0 \end{bmatrix}$$

Was bedeuten die einzelnen Komponenten der Teilmatrizen? [LeWi93]

Der antisymmetrische Teil enthält drei unabhängige Komponenten, welche die Rotation der Geschwindigkeit bestimmen.

Der symmetrische Teil wird „stress-strain“ Tensor genannt. Wenn das Bezugskoordinatensystem so gewählt wird, daß die Elemente die nicht in der Diagonalen des „stress-strain“ Tensors liegen Null werden, dann stellt der Tensor nur noch eine Vergrößerungsbewegung dar.

Beispiel in 2D:

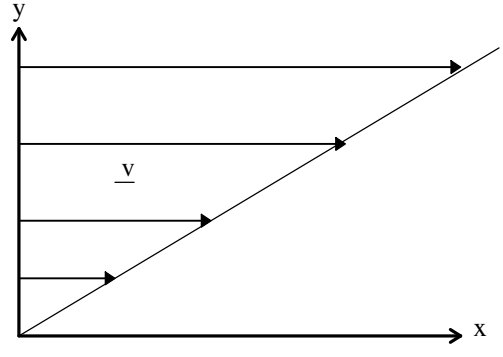

Abb. 5

Es ist das Vektorfeld $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4y \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben (Abb. 5). Daraus ergibt sich die Jakobimatrix $J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und die transponierte Jakobimatrix $J^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Damit läßt sich die Jakobimatrix zerlegen. Es ergibt sich also $J_{sym} = \frac{J + J^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ und $J_{asym} = \frac{J - J^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Die Wirkung dieser beiden Matrizen kann man sich direkt an einem Rechteck, welches man in das Vektorfeld bringt, anschauen (Abb. 6).

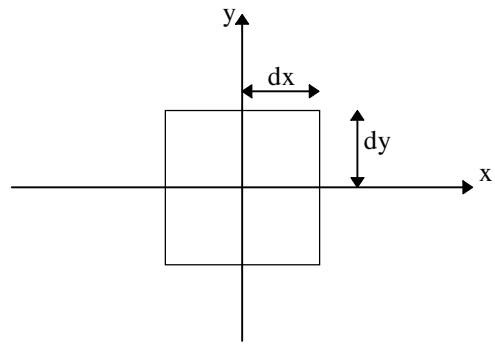

Abb. 6

Berechnet man für die Eckpunkte dieses Rechteckes (welches hier als Quadrat dargestellt ist) die Auswirkungen für J_{sym}, so sieht man folgende Wirkung (Abb. 7).

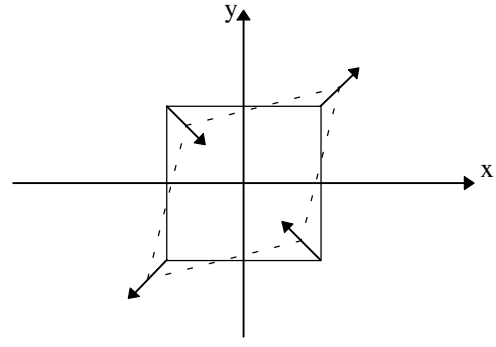

Abb. 7

Es handelt sich also beim symmetrischen Teil um eine Scherung. Der asymmetrische Teil ergibt Abb. 8.

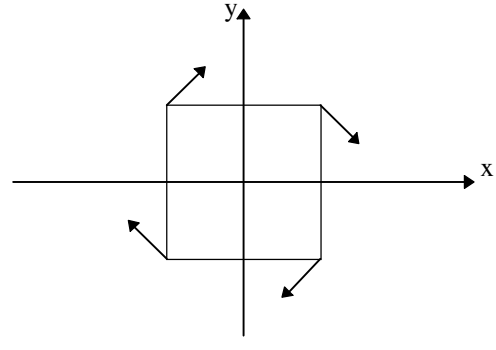

Abb. 8

Man sieht, daß der asymmetrische Teil eine Verdrehung eines infinitesimalen Flüssigkeitsteilchens um den Punkt an dem der Tensor definiert ist ergibt.

Die Aufteilung in diese zwei Teile kann man sich so vorstellen, daß man eine Überlagerung von Rotation, Scherung und Vergrößerung hat. Einmal betrachtet man also ein

Objekt welches sich nur drehen (antisymmetrisch) und zum anderen ein Objekt welches nur seine Form verändern kann.

Wie kann man noch zerlegen?

Eine andere Möglichkeit ist es die Jakobimatrix in ein lokales Koordinatensystem zu transformieren. Das lokale System ist so ausgerichtet, daß die x-Achse immer parallel zum Geschwindigkeitsvektor ist. Die y-Achse ist parallel zum Krümmungsvektor. Die z-Achse ist das Kreuzprodukt aus x- und y-Achse. Ein solches Koordinatensystem wird Frenet Koordinatensystem genannt.

Die transformierte Matrix wird in einen Teil parallel zur Geschwindigkeit und einen senkrecht zur Geschwindigkeit zerlegt.

Parallel zur Geschwindigkeit sind alle Komponenten die nach x abgeleitet werden und alle die in x-Richtung zeigen. Alle anderen Komponenten stehen senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor.

$$J \xrightarrow{\textit{transformiert}} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{parallel zum Fluß}} \begin{bmatrix} a & s & s \\ c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textit{senkrecht zum Fluß}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & \frac{c}{t} \\ 0 & \frac{c}{t} & c \end{bmatrix}$$

Welche Bedeutung haben jetzt die einzelnen Komponenten?

Die zweite Matrix (senkrecht zum Fluß) kann man jetzt in eine sym. und eine asym. Matrix aufspalten (wie vorhin). Man bekommt auch hier einen Rotations- und einen „stress-strain“-Tensor.

Die erste Matrix (parallel zum Fluß) enthält folgende Komponenten. In der obersten Reihe ist zuerst die Beschleunigung. Die beiden Komponenten daneben sind die Scherung im Fluß. In der ersten Spalte ist die Krümmung der Stromlinie angegeben.

Literaturliste

[AbSh92] Abraham L., Shaw K., „Dynamics, The Geometry of Behavior“, 1992, ADDISON-WESLEY

[Hlaw86] Prof. Hlawka E., „Mathematik 1 Skriptum für Elektrotechnik“, 1986, Fachschaft Elektrotechnik

[Hlaw87] Prof. Hlawka E., „Mathematik 2 Skriptum für Elektrotechnik“, 1987, Fachschaft Elektrotechnik

[LeWi93] Leeuw W.C., Wijk J.J., „A Probe for Local Flow Field Visualization“ 1993, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 39-45.

[POWi90] Prandtl L., Oswatitsch K., Wieghardt K., „Führer durch die Strömungslehre“, 1990, VIEWEG